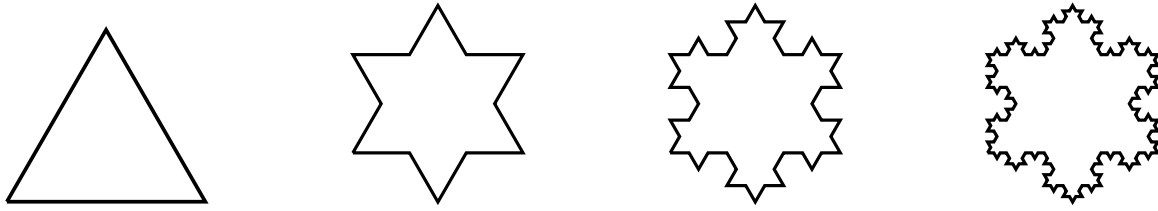


Définition de notions géométriques, intégrale, et équirépartition

I) Des résultats géométriques contre-intuitif

1) Une courbe bornée de longueur infinie

Le flocon de Koch est la courbe «limite» obtenue en partant d'un triangle équilatéral initial et en remplaçant, à chaque étape, chaque côté --- de la courbe par un motif $-\wedge-$.



Formellement, si on note $F_n \subset \mathbb{R}^2$ l'ensemble des points à l'étape n , le flocon de Koch est défini comme

$$F_\infty = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, x \in F_n\}.$$

À chaque étape chaque côté de longueur ℓ est remplacé par une courbe de longueur $\frac{4}{3}\ell$. Si la figure initiale a un périmètre de 1, le périmètre de la k -ème figure vaut $(\frac{4}{3})^k$, et le fractale de Koch devrait avoir un périmètre infini.

2) Fonction de Takagi

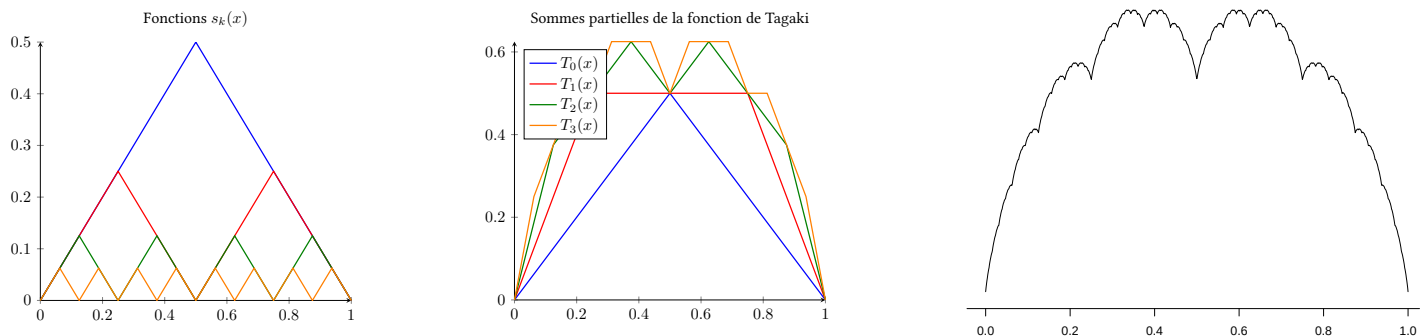
On peut reproduire le phénomène précédent pour définir une fonction continue $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dont le graphe aura une longueur infinie. Pour cela,

- on part de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $s_0(x) = d(x, \mathbb{Z})$. Pour $x \in [0, 1]$, on a $s_0(x) = \frac{1}{2} - |x - \frac{1}{2}|$ (un triangle de base $[0, 1]$), et on prolonge cette expression de manière 1-périodique.
- pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $s_k(x) = \frac{1}{2^k} s(2^k x)$, dont le graphe sur $[0, 1]$ est formé de 2^k triangles de base $\frac{1}{2^k}$.
- on somme ces fonctions, en posant $T_k(x) = \sum_{i=0}^k s_i(x)$.

La fonction T de Takagi est définie comme «la limite» de ces fonctions T_k , ce qui est ici plus simple à formaliser :

$$T(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^k s_i(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^k \frac{1}{2^i} d(2^i x, \mathbb{Z}) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^i} d(2^i x, \mathbb{Z}).$$

La limite considérée existe bien, comme limite d'une suite croissante, majorée par $\sum_{i=0}^k \frac{1}{2^i} = 1 - \frac{1}{2^k} \leq 1$.



On peut montrer que la fonction limite est bien continue, mais que la longueur de son graphe est infinie.

3) Toutes les parties n'ont pas d'aires

Si on admet l'axiome du choix, il n'est pas possible de définir une notion «d'aire» pour laquelle toutes les parties de $\mathbb{R}^2$ aurait une aire.

Théorème – Banach–Tarski. Il est possible de partitionner la boule unité de $\mathbb{R}^3$ en un nombre fini de parties, puis de transformer ces parties par rotations et translations pour les recombinaison en deux boules de rayon 1 (qui sont donc isométriques à la boule d'origine).

Remarque Les parties qui interviennent doivent être suffisamment horribles pour qu'il ne soit pas possible de leur définir un volume.

Remarque Sous d'autres axiomes assez raisonnables mais incompatibles avec l'axiome du choix, la mesure de Lebesgue permet de définir la «longueur» de toute partie de $\mathbb{R}$, «l'aire» de toute partie de $\mathbb{R}^2$, ou le «volume» de toute partie de $\mathbb{R}^3$.

4) Courbe de Peano

La courbe de Peano est une «courbe» continue à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ qui recouvre tout le carré $[0, 1]^2$.

Théorème Il existe une surjection continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]^2$.

Démonstration. Cf feuille culturelle sur la continuité. □

II) Définition de l'intégrale

1) L'intégrale comme l'aire sous la courbe

On veut définir l'intégrale d'une fonction comme l'aire (algébrique) sous la courbe de celle-ci. Deux questions se posent :

- comment définir proprement «l'aire» d'une partie du plan,
- quelles seront les fonctions pour lesquelles la partie sous la courbe admettra une aire (quelles seront les fonctions intégrables).

Il existe plusieurs notions d'intégrales distinctes, les plus connues étant celles de Riemann (plus élémentaire) et de Lebesgue (plus générale, et universellement utilisée). La construction (la définition) de l'intégrale de Riemann sera étudiée proprement à la fin de l'année de MPSI.

Définir des notions de longueur/d'aire

Une approche naturelle pour définir la longueur d'une courbe, ou l'aire d'une partie et d'utiliser la limite d'approximations géométriques simples :

- Une courbe paramétrée par $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ peut être approchée par une ligne polygonale, obtenue par exemple en joignant par des segments les points consécutifs de la forme $\varphi(\frac{k}{n})$, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
- Pour une partie raisonnable du plan, on peut approcher son bord par des polygones, dont on sait définir l'aire.

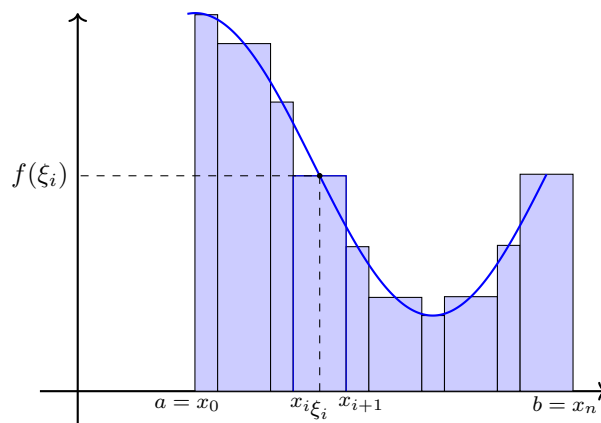
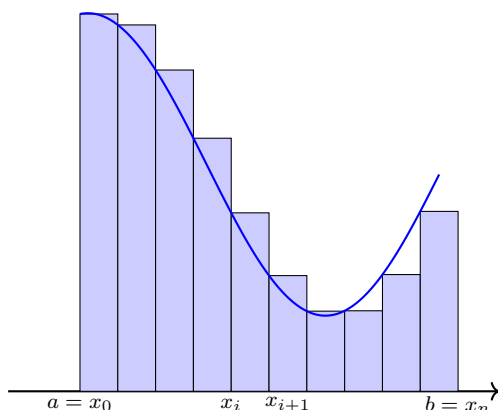
Pour définir formellement la longueur/l'aire, il faudrait

1. que de telles approximations existent (qu'est-ce que le «bord» d'une partie...)
2. que le procédé converge (ou tend vers $+\infty$), c'est-à-dire que la longueur/l'aire des approximations converge.
3. que la limite ne dépende pas du procédé d'approximation choisi.

L'aire sous une courbe

Pour ce qui est d'une fonction définie sur un segment $[a, b]$, on peut approcher l'aire sous la courbe par la somme des aires de rectangles, ayant pour bases une subdivision régulière du segment $[a, b]$ et pour hauteurs celles de la courbe en ces abscisses. On obtient des sommes comme $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(a + k \frac{b-a}{n})$, appelées sommes de Riemann associée à f .

Les sommes de Riemann généralisées sont obtenues en utilisant des découpages non réguliers (subdivisions) de l'axe des abscisses, et en choisissant pour hauteur du rectangle de base $[c, d]$ n'importe quel $f(t)$ pour $t \in [c, d]$.



Définition naïve

Il est tentant de définir l'intégrale de f comme la limite de la suite $(S_n)_{n \geq 1}$, si elle existe. Cette définition aurait l'avantage d'être simple, et vérifierait immédiatement certaines propriétés souhaitées de l'intégrale : linéarité, positivité.

Cette définition est trop peu contraignante, au sens où trop de fonctions seraient intégrables. On peut imaginer une fonction $f: [a, b]$ dont les valeurs en tous les points $a + \frac{k(b-a)}{n}$ soient suffisamment sympathiques (par exemple, tous nuls) pour assurer la convergence de la suite (S_n) , mais dont le comportement en dehors de ces points soit horrible. Ou plus simplement une fonction qui vaut 0 en tous les points $a + \frac{k(b-a)}{n}$ mais qui vaut 1 ailleurs. La limite de (S_n) vaudrait 0 alors que la fonction vaut presque partout 1.

Autre soucis : la relation de Chasles ne serait simplement pas vérifiée pour ces fonctions pathologiques. Elle resterait bien vérifiée pour les fonctions continues, mais ce n'est pas clair a priori.

Définition de l'intégrale de Riemann

À la définition naïve précédente, on va préférer une définition plus compliquée et plus contraignante.

Sans rentrer dans les détails techniques, une définition possible de l'intégrale de Riemann consiste à dire qu'une fonction f est intégrable si toutes les sommes de Riemann généralisées de f convergent, quand la subdivision devient arbitrairement fine, vers une même valeur. Avec cette définition, les propriétés usuelles de l'intégrale sont essentiellement immédiates, mais l'intégrabilité des fonctions continues est un théorème non trivial, conséquence du résultat d'approximation suivant.

Théorème Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction en escalier g telle que $\forall x \in [a, b], |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$.

Remarque Une fonction φ en escalier sur $[a, b]$ est une fonction constante par morceaux, c'est-à-dire pour laquelle il existe une suite $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ telle que φ soit constante sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$.

III) Une application de l'intégration : l'équidistribution de suites dans $[0, 1]$

Définition Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $[0, 1]$ est dite équidistribuée si la «proportion» de termes de la suite qui tombe dans tout segment de $[0, 1]$ est proportionnelle à la longueur du segment.

Formellement : pour tous $0 \leq a \leq b \leq 1$, on a
$$\frac{|\{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid a_i \in [a, b]\}|}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b - a.$$

1) Suite intégrant une fonction

Étant donné une suite $a = (a_n)_{n \geq 1} \in [0, 1]^{\mathbb{N}^*}$, on dit que a intègre une fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ (dont l'intégrale a un sens) si

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(a_k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt$$

La suite a étant fixée, on s'intéresse à l'ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions qui sont intégrées par a . Le lemme technique suivant traduit que $\mathcal{F}$ est stable par deux procédés d'approximation.

Lemme

- Si (f_n) est une suite de fonctions intégrées par a , et (f_n) converge uniformément vers une fonction g , au sens où, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall x \in [0, 1], |f_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon$, alors a intègre g .
- Si $(f_{1,n})$ et $(f_{2,n})$ sont deux suites de fonctions intégrées par a , et g une autre fonction telle que $\forall n \in \mathbb{N}, f_{1,n} \leq g \leq f_{2,n}$, et $\int_0^1 f_{2,n}(t) - f_{1,n}(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, alors a intègre g .

Démonstration. 1. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, |f_{n_0}(x) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

À ce rang n_0 on a

- $\left| \int_0^1 f_{n_0}(x) dx - \int_0^1 g(x) dx \right| = \left| \int_0^1 f_{n_0}(x) - g(x) dx \right| \leq \int_0^1 |f_{n_0}(x) - g(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{3}.$
- pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\left| \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m g(a_k) - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m f_{n_0}(a_k) \right| \leq \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m |g(a_k) - f_{n_0}(a_k)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$

Comme $\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m f_{n_0}(a_k) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_{n_0}(t) dt$, il existe un rang m_0 à partir duquel $\left| \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m f_{n_0}(a_k) - \int_0^1 f_{n_0}(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$

On a alors, pour tout $m \geq m_0$,

$$\left| \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m g(a_k) - \int_0^1 g(x) dx \right| \leq \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m |g(a_k) - f_{n_0}(a_k)| + \int_0^1 |g(x) - f_{n_0}(x)| dx + \left| \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m f_{n_0}(a_k) - \int_0^1 f_{n_0}(x) dx \right| \leq \varepsilon.$$

2. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang n_0 auquel $\int_0^1 f_{2,n_0}(t) - f_{1,n_0}(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{3}.$

On a, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m f_{1,n_0}(a_k) \leq \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m g(a_k) \leq \sum_{k=1}^m f_{2,n_0}(a_k) \quad \text{et} \quad \int_0^1 f_{1,n_0}(t) dt \leq \int_0^1 g(t) dt \leq \int_0^1 f_{2,n_0}(t) dt.$$

Comme a intègre f_{1,n_0} et f_{2,n_0} , pour m assez grand, les sommes qui encadrent $\sum_{k=1}^m g(a_k)$ sont proches, à $\frac{\varepsilon}{3}$, des intégrales qui encadrent $\int_0^1 g(t) dt$, ce qui implique $\left| \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m g(a_k) - \int_0^1 g(t) dt \right| \leq \varepsilon.$ $\square$

2) Caractérisation de l'équidistribution

Théorème – Weyl. Soit $(a_n)_{n \geq 1} \in [0, 1]^{\mathbb{N}^*}$ une suite. Les assertions suivantes sont équivalentes

(i) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est équidistribuée.

(ii) Pour toute fonction continue $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,
$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(a_k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt$$

(iii) Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2i\pi r a_k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Démonstration. On en donne quelques éléments.

(i) $\Rightarrow$ (ii) : La propriété (i) dit exactement que (ii) est vraie pour les fonctions indicatrices $f = \mathbf{1}_{[a,b]}$ (fonction constante égale à 1 sur $[a, b]$, et nulle ailleurs).

Alors (ii) sera vérifiée pour toutes les combinaisons linéaires de telles fonctions indicatrices, c'est-à-dire les fonctions en escaliers.

Comme les fonctions continues peuvent être approchées uniformément par des fonctions en escaliers, on en déduit (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Si $a < b \in]0,1[$, on peut encadrer la fonction indicatrice $1_{[a,b]}$ par deux fonctions continues dont les intégrales sont arbitrairement proches de $b - a$: prendre pour fonction majorante une fonction qui vaut 1 sur $[a, b]$, 0 sur $[0, a - \varepsilon]$ et $[b + \varepsilon, 1]$ et qui varie brusquement de manière affine entre $a - \varepsilon$ et a , et entre b et $b + \varepsilon$.

La deuxième partie du lemme implique alors (i).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : En appliquant (ii) à la fonction continue à valeurs complexes $t \mapsto e^{2i\pi r}$, on obtient (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (ii) : En prenant les parties réelles et imaginaires, de (iii), on obtient que (ii) est vérifiée pour les fonctions $x \mapsto \cos(rx)$ et $x \mapsto \sin(rx)$.

Un autre résultat d'approximation de Weierstrass affirme que toute fonction continue $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = f(1)$ peut être approchée uniformément par des polynômes trigonométriques, c'est-à-dire des combinaisons linéaires de fonctions $\cos(rx)$ et $\sin(rx)$.

La propriété (ii) est donc vérifiée pour les fonctions continues telle que $f(0) = f(1)$.

La deuxième partie du lemme permet de l'étendre à toutes les fonctions (encadrer une fonction continue g par deux fonctions continues vérifiant $f(0) = f(1)$, et dont les intégrales sont très proches de celle de g) $\square$

3) Application

Corollaire Soit $a \in \mathbb{R}$ irrationnel. La suite $(na)_{n \geq 1}$ est équirépartie modulo 1, c'est-à-dire que la suite des parties fractionnaires $(\{na\})_{n \geq 1}$ est équirépartie.

Démonstration. On vérifie (iii) : pour $r \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2i\pi r \{ka\}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2i\pi r ka} = \frac{1}{n} \frac{1 - e^{2i\pi r(n+1)a}}{1 - e^{2i\pi r a}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. $\square$